

Name, Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1: (15 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Aufgabenteilen.

- a) Die Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = x$ mit $x(0) = 1$ lautet:

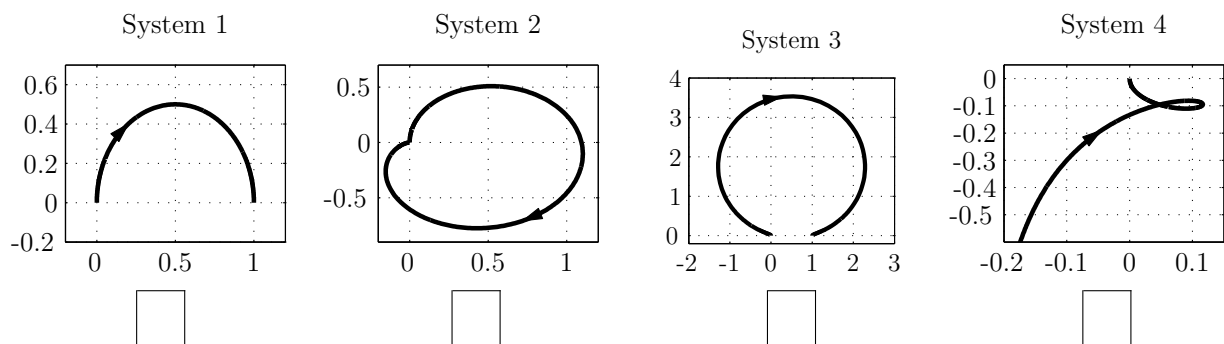
☐ $x(t) = e^t$ ☐ $x(t) = e^{-t}$

- b) Die Stabilität eines linearen Übertragungsgliedes ist unabhängig von seinem Zählerpolynom.

☐ richtig ☐ falsch

- c) Gegeben sei das System $G(s) = \frac{5s}{(s+1)(3s+1)(s+1)}$.

Welche der folgenden Ortskurven zeigt den Frequenzgang dieses Systems?



d) Für welches Übertragungsglied verwendet man folgendes Schaltzeichen?



- ☐ Proportionalglied
- ☐ Totzeitglied
- ☐ Integrator

e) Kennzeichnen Sie Methoden zur Berechnung der Transitionsmatrix!

- ☐ Verfahren nach Cayley-Hamilton
- ☐ Hurwitz-Kriterium
- ☐ Gesetz von Nyquist
- ☐ Berechnung über Laplace-Transformation
- ☐ Berechnung über Jordan-Normalform

f) Ein Operator $L\{\cdot\}$ ist genau dann linear, wenn für alle x gilt: $\alpha L\{x\} = L\{\alpha x\}$.

- ☐ richtig ☐ falsch

g) Wie lautet die Laplace-Transformierte von $\ddot{y}(t)$?

- ☐ $s^2 Y(s) - y(0) - s \dot{y}(0)$ ☐ $s^2 Y(s) - \dot{y}(0) - s y(0)$

h) Die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s^2 + 2}{-3s^2 - 4s - 2}$ ist stabil.

- ☐ richtig ☐ falsch

i) Die Zustandsraumdarstellung eines linearen zeitinvarianten dynamischen Systems ist bis auf die Wahl der Anfangsbedingungen eindeutig.

- ☐ richtig ☐ falsch

Aufgabe 2: (5 Punkte)

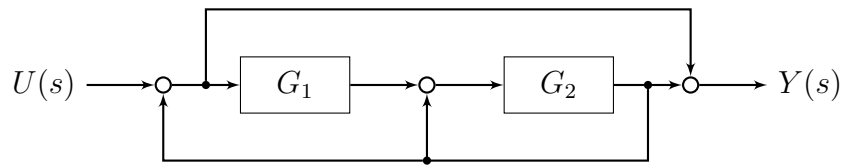
In dieser Aufgabe wird ein System in Zustandsraumdarstellung betrachtet:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \underline{x}(0) = \underline{0} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}.\end{aligned}$$

Untersuchen Sie mit einem geeigneten Verfahren das System auf asymptotische Stabilität!
Hinweis: Eine Eigenwertberechnung ist nicht erforderlich.

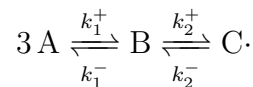
Aufgabe 3: (5 Punkte)

Geben Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ folgenden Netzwerkes ohne Doppelbrüche an.



Aufgabe 4: (15 Punkte)

In dieser Aufgabe wird ein chemischer Reaktor betrachtet, der die Substanzen A, B und C enthält. Die Konzentrationen dieser Reaktanden werden bezeichnet als c_A , c_B und c_C . Zwischen ihnen finden folgende Reaktionen statt:



Dabei sind k_1^+ , k_1^- , k_2^+ und k_2^- konstante, positive Reaktionsparameter. Die Reaktionsraten können daraus berechnet werden als:

$$\begin{aligned} r_{AB} &= k_1^+ c_A^3 - k_1^- c_B \\ r_{BC} &= k_2^+ c_B - k_2^- c_C \end{aligned}$$

Aus einer Bilanzierung der Stoffmengen der drei Reaktanden folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dc_A}{dt} &= -3 r_{AB} \\ \frac{dc_B}{dt} &= r_{AB} - r_{BC} \\ \frac{dc_C}{dt} &= r_{BC} \end{aligned}$$

- Schreiben Sie das obige Modell als nichtlineares Zustandsraummodell in der Form $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$, $y = g(\underline{x})$. Der Zustandsvektor $\underline{x}$ habe dabei die Komponenten $\underline{x} = [c_A, c_B, c_C]^T$. Der Ausgang sei die Konzentration der Komponente C. Das System befinde sich anfangs am Arbeitspunkt $\underline{x}_0 = [c_{A0}, c_{B0}, c_{C0}]^T$.
- Es sind nun folgende Reaktionsparameter gegeben: $k_1^+ = 1$, $k_1^- = 4$, $k_2^+ = 2$, $k_2^- = 1$. Von dem Arbeitspunkt, der $\underline{f}(\underline{x}_0) = \underline{0}$ erfüllt, ist lediglich eine Stoffkonzentration bekannt: $c_{A0} = 2$. Berechnen Sie die Konzentration der weiteren Reaktanden am Arbeitspunkt.
- Linearisieren Sie das Modell an einem allgemeinen Arbeitspunkt $\underline{x}_0 = [c_{A0}, c_{B0}, c_{C0}]^T$ für allgemeine Reaktionsparameter. Führen Sie dazu die Abstandsvariablen $\Delta \underline{x}$ ein mit $\Delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_0$. Schreiben Sie das System in Matrix-Vektor-Schreibweise. Beachten Sie, dass das System autonom ist, also keinen Eingang hat.
- Setzen Sie den bei b) gefundenen Arbeitspunkt und die Reaktionsparameter in das linearisierte Modell ein. Charakterisieren Sie die Stabilität des an diesem Arbeitspunkt linearisierten Modells!

Aufgabe 5: (15 Punkte)

Gegeben ist folgendes System:

$$\begin{aligned}\underline{\dot{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}.\end{aligned}$$

- a) Berechnen Sie die Transitionsmatrix für dieses System.
- b) Berechnen Sie den Verlauf von $y(t)$ für $t \geq 0$. Als Anregung wird eine Einheitsrampe verwendet: $u(t) = t$.

Aufgabe 6: (15 Punkte)

Im Laplace-Bereich sei folgende Übertragungsfunktion gegeben:

$$G(s) = \frac{s + a}{(s + 2)(s + b)(s + c)} e^{-ks}, \quad k \geq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- a) Charakterisieren Sie die Stabilität des Übertragungsverhaltens von $G(s)$ in Abhängigkeit der Parameter a, b, c und k .
- b) Leiten Sie einen Ausdruck für die Amplitude der komplexen Übertragungsfunktion in Abhängigkeit der Parameter a, b, c und k her. Geben Sie die Amplitude $A_{\text{dB}}(\omega)$ in Dezibel an! Werten Sie $A_{\text{dB}}(\omega)$ numerisch aus für $\omega = 0.1 \text{ rad/s}$ sowie für $\omega = 100 \text{ rad/s}$. Dabei sei $a = 1, b = 10, c = 5$ und $k = 0$.
- c) Es seien weiterhin $a = 1, b = 10, c = 5$ und $k = 0$. Zeichnen Sie ein Bode-Diagramm:
- Verwenden Sie für den Amplitudengang die Geradenapproximation. Geben Sie jeweils die Steigung der Geraden an.
 - Der Phasengang lautet:

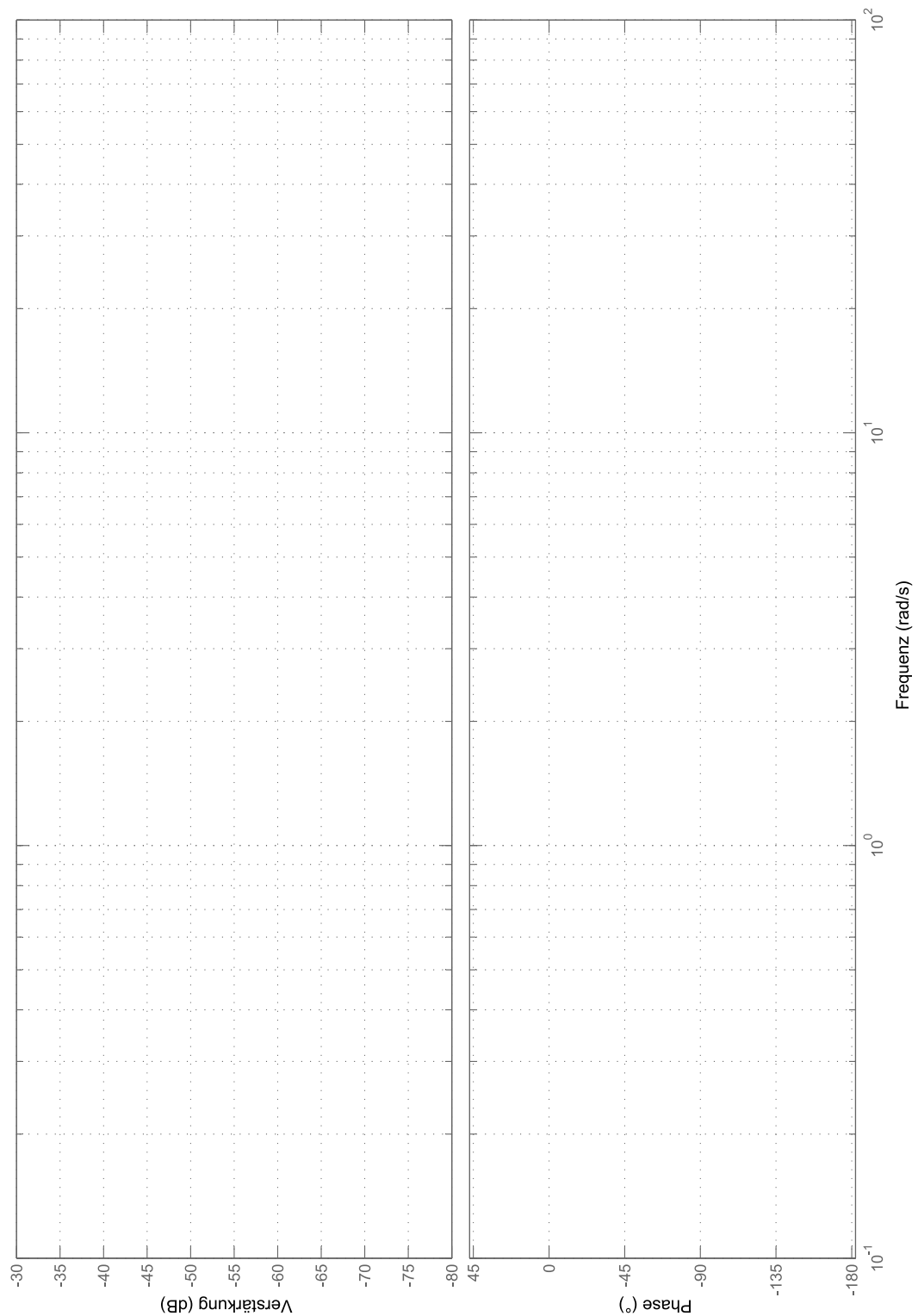
$$\varphi(\omega) = \arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{5}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right).$$

Legen Sie eine Wertetabelle an mit $\omega = [0.1, 0.4, 0.7, 1, 2, 20, 60, 100]$. Zeichnen Sie den Phasengang anhand dieser Wertetabelle.

Verwenden Sie zum Zeichnen des Bodediagramms ausschließlich einen der angehängten Vordrucke.

Dieses Blatt bewerten

Hinweis: Sind Blätter 8 und 9 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 9 bewertet.



Dieses Blatt bewerten

Hinweis: Sind Blätter 8 und 9 zur Bewertung markiert oder ist kein Blatt zur Bewertung markiert, wird Blatt 9 bewertet.

